Eine Bemerkung zum Abel'schen Theorem*

Carl Jacobi

Der hoch geehrte Abel hat bewiesen (Diar. Crell. Vol. III. p. 313 ff.), während U, V, A, B ganze Funktionen der Variable x und $\Pi(x)$ das Integral

$$\int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{AB}} = \Pi(x)$$

bezeichnen, dass die Wurzeln der algebraischen Gleichung

$$AUU - BVV = 0$$

solche sein werden, dass die Summe $\sum \pm \Pi(x)$, über all jene Wurzeln erstreckt, von den Koeffizienten der Funktionen U, V überhaupt nicht abhängt; das Theorem erstreckt sich auch auf den allgemeineren Fall, in welchem

$$\Pi(x) = \int\limits_0^x \frac{Sdx}{T\sqrt{AB}}$$

ist, während S, T und dieselben Funktionen wie oben beliebige ganze Funktionen der Variable x bezeichnen. Natürlich hat er in diesem Fall bewiesen, dass die Summe $\sum \pm \Pi(x)$ allgemein einem algebraischen und logarithmischen Ausdruck der Koeffizienten der Funktionen U, V gleich sein wird. Die Vorzeichen $\pm$, die den einzelnen $\Pi(x)$ in der angegebenen Summe voranzustellen sind, müssen dieselben sein wie die der Werte des Ausdrucks AUV.

*Originaltitel: "De Theoremate Abeliano Observatio", zuerst publiziert in: *Crelle Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 9* (1832): pp. 99, Nachdruck in: Jacobi's Gesammelte Werke: Band 2, pp. 1 – 4, übersetzt von: Alexander Aycock für den "Euler-Kreis Mainz".

Ich bemerke, dass das Theorem leicht auf den Fall erweitert werden kann, in welchem die vorgelegte Gleichung

$$AUU + 2BUV + CVV = 0$$

wird, während wiederum A, B, C, S, T, U, V ganze Funktionen und $\Pi(x)$ das Integral:

$$\int_0^x \frac{Sdx}{T\sqrt{BB-AC}} = \Pi(x)$$

bezeichnen. In diesem Fall, wenn freilich $T = x - \alpha$ gesetzt wird, auf welchen Fall der allgemeinere leicht zurückgeführt wird, stellt sich das Abel'sche Theorem so dar.

THEOREM

"Es seien A, B, C, S, U, V ganze Funktionen der Variablen x, man setze $BB - AC = \varphi(x)$ und das Integral

$$\int_0^x \frac{Sdx}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi(x)}} = \Pi(x),$$

werden die algebraischen Wurzeln der Gleichung

$$AUU + 2BUV + CVV = 0$$

solche sein, dass die Summe $\sum \pm\Pi(x)$, über alle ihre Wurzeln erstreckt,

$$c + r - L$$

ist, während

1) c eine von den Koeffizienten der Funktionen U, V unabhängige Größe,

2) r eine algebraische Funktion der Koeffizienten der Funktionen U, V, gleich dem Koeffizienten des Terms $\frac{1}{x}$ in der Entwicklung des Ausdrucks

$$\frac{S}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi(x)}} \log \frac{AU + BV + V\sqrt{\varphi(x)}}{AU + BV - V\sqrt{\varphi(x)}},$$

wenn die Entwicklung nach sinkenden Potenzen von x gemacht worden ist,

3) L den Wert des Ausdrucks

$$\frac{S}{\sqrt{\varphi(x)}} \log \frac{AU + BV + V\sqrt{\varphi(x)}}{AU + BV - V\sqrt{\varphi(x)}},$$

nach Setzen von $x = \alpha$,

bezeichnet.

Die Vorzeichen $\pm$, welche in der angegebenen Summe $\sum \pm \Pi(x)$ den einzelnen $\Pi(x)$ voranzustellen sind, sind dieselben wie die der Werte des Ausdrucks $\frac{AU+BV}{V}$."

Für $B = 0$ geht dieses Theorem in das Abel'sche über; ich übergehe den Beweis, weil er für jedes der beiden derselbe ist.

Königsberg, 14. Main 1832.